弦方程式の時間発展のHamilton構造 (複素領域における微分方程式の大域解析と漸近解析)

高崎, 金久

数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 189-203

弦方程式の時間発展の Hamilton 構造

京都大学大学院人間・環境学研究科　高崎金久 (Kanehisa Takasaki)
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

1 はじめに

ここで紹介するのは 2002 年 6 月の短期共同研究[1]で報告したこと [1] の続編である．1 変数 x の常微分作用素

$$Q = \partial_x^q + u_2\partial_x^{q-2} + \cdots + u_p, \quad P = \partial_x^p + v_2\partial_x^{p-2} + \cdots + v_p$$

$(\partial_x = \partial/\partial x)$ に対する交換子方程式

$$[Q, P] = 1 \tag{1}$$

を弦方程式あるいは Douglas 方程式という [2, 3, 4, 5, 6] [2]．前回の報告と同様，以下でも

$$q = 2, \quad p = 2g + 1 \tag{2}$$

の場合を考える．このとき Q は Sturm-Liouville 型作用素

$$Q = \partial_x^2 + u \tag{3}$$

であり，対応する P は KdV 方程式の高次時間発展（すなわち KdV 階層）の構成に現れる微分作用素 [10] と同じものになる．特に $q = 2, p = 3$ の場合には弦方程式は u に対する微分方程式

$$\frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + 1 = 0$$

[1]「微分方程式の変形と漸近解析」京都大学数理解析研究所 2002 年 6 月 3 日〜7 日

[2] この方程式は物理学で 2 次元量子重力理論や非臨界弦理論を記述するものとして見出された．これとはやや異なる文脈（位相的共形場理論・弦理論）でやはりソリトン方程式と密接に関連するものとして，Kontsevich の行列型 Airy 函数 [7] がある．これらは数学的には KP 階層の枠内で統一的に理解することができる．詳しくは Adler と van Moerbeke の論文 [8] や解説 [9] を参照されたい．

に帰着する（添字は x についての導函数 $u_x = \partial u/\partial x, \ldots, u_{xxx} = \partial^3 u/\partial x^3$, をあらわす）．これを x について 1 回積分すればPainlevé I 型方程式

$$\frac{1}{4}u_{xx} + \frac{3}{4}u^2 + x = 0 \tag{4}$$

となる（積分定数は x のずらしに吸収できる）．その意味で $q = 2$ の場合の弦方程式はPainlevé I 型方程式の高階（$p = 2g + 1$ の場合には $2g$ 階）拡張とみなせる．

弦方程式は線形微分方程式系

$$Q\psi = \lambda\psi, \quad P\psi = \partial_\lambda\psi \tag{5}$$

の Frobenius の意味の可積分条件とみなせる．ここで λ は新たに導入された変数で，KdV 方程式の場合にはスペクトルパラメータと呼ばれるものに他ならない．この線形微分方程式系を 2×2 行列型の方程式系

$$\partial_x\Psi = U(\lambda)\Psi, \quad \partial_\lambda\Psi = V(\lambda)\Psi \tag{6}$$

に書き直すことができる．ここで

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_x\psi \end{pmatrix}, \quad U(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - u & 0 \end{pmatrix}, \quad V(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda) \end{pmatrix}$$

$V(\lambda)$ の行列要素 $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ は λ について多項式的に依存する（詳しい構造は後で示す）．このことから弦方程式は λ に関する常微分方程式系 $\partial_\lambda\Psi = V(\lambda)\Psi$ の等モノドロミー変形を定めることがわかる．

前回の報告では，弦方程式の非自励 Hamilton 系（x を時間変数とする）としての構造を考えた．その際に上の線形微分方程式系の係数行列 $V(\lambda)$ が基本的な役割を演じた．この行列の固有値方程式

$$\det(\mu I - V(\lambda)) = \mu^2 + \det V(\lambda) = 0 \tag{7}$$

は平面代数曲線（種数 g の超楕円曲線）を定める．この曲線が可積分系（等スペクトル変形）の場合のスペクトル曲線に相当する．可積分系の変数分離の考え方をこの設定に適用すると，弦方程式はこの曲線上の g 個の点の力学系に翻訳される．ただし，通常の可積分系の場合と違ってこの曲線自体が x に依存して変化するので，文字通りの意味での変数分離ができるわけではない．仮にそれが可能ならば，解はスペクトル曲線に付随する Abel 函数となるはずだが，Painlevé I 型方程式の解は決してそうならないことがよく知られている．それでも変数分離可能な Hamilton 系（古典的な Stäckel 型 Hamiltonian をもつ）に準じた取り扱いができることは興味深い．また，2×2 型 Schlesinger 系から Garnier 系を

導く議論 [12] も同様の意味で変数分離法に準じた理解ができるので，それとの比較の意味でもこのことは重要である．

ところで，弦方程式には可換な時間発展を有限個導入することができる．$q=2$ の場合にはそれは KdV 階層の最初のいくつかの時間発展に他ならない．そこで問題になるのは，前回紹介したような結果がこれらの時間発展についても成立するかどうか，ということである．今回の報告の目的はこの問題に対する肯定的解答を示すことにある．

2 時間発展の方程式

弦方程式に対する可換な時間発展の存在は Douglas がすでに指摘していたが [2]，KP 階層の枠組で見直すことによってその一般的意味が明らかになる [8]．

2.1 KP 階層の拡張された Lax 形式

KP 階層は擬微分作用素

$$L = \partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} g_{n+1}\partial_x^{-n}$$

に対する Lax 方程式系

$$\partial_{t_n} L = [B_n, L], \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

として定式化されることが多い．ここで B_n は

$$B_n = (L^n)_+ \quad (L^n \text{ の微分作用素部分}) \tag{9}$$

と定義される微分作用素である．この Lax 方程式系に対して，新たに（無限階の）擬微分作用素

$$M = \sum_{n=2}^{\infty} n t_n L^{n-1} + x + \sum_{n=1}^{\infty} h_n L^{-n-1}$$

を導入して Lax 方程式系

$$\partial_{t_n} M = [B_n, M], \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

と正準交換関係

$$[L, M] = 1 \tag{11}$$

を連立させることができる [11]．ちなみに，これらの方程式は第 3 の擬微分作用素

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \partial_x^{-n}$$

に対する微分方程式系（佐藤方程式と呼ばれることもある）

$$\partial_{t_n} W = -\left(W \partial_x^n W^{-1} \right)_- W \tag{12}$$

から

$$L = W \partial_x W^{-1}, \quad M = W \Big(\sum_{n=2}^{\infty} n t_n \partial_x^{n-1} + x \Big) W^{-1} \tag{13}$$

という関係によって導かれる．$(\ \ )_-$ は擬微分作用素の微分作用素部分を除いた残りをあらわす．

2.2 弦方程式への簡約

さてここで

$$Q = L^2, \quad P = \frac{1}{2} M L^{-1} \tag{14}$$

とおいて，付加条件

$$(Q)_- = 0, \quad (P)_- = 0 \tag{15}$$

を課す．Q に対する付加条件は KdV 階層への簡約を意味するもので，これによって Q が $\partial_x^2 + u$ という微分作用素になるとともに，偶数番目の時間発展は $\partial_{t_{2n}} g_k = \partial_{t_{2n}} h_k = 0$ というように自明化する．以後，偶数番目の時間変数はゼロに固定しておく：

$$t_2 = t_4 = \cdots = 0. \tag{16}$$

さらに P を主係数が 1 の $2g+1$ 階作用素にするため，時間変数を

$$\frac{2g+3}{2} t_{2g+3} = 1, \quad t_n = 0 \; (n > 2g+3) \tag{17}$$

という有限次元部分に制限する．これによって

$$P = L^{2g+1} + \sum_{n=1}^{g+1} \frac{2n+1}{2} t_{2n+1} L^{2n-1} + \frac{1}{2} x L^{-1} + \cdots$$

となる．P に対する付加条件を言い換えれば $P=(P)_+$ ということであるから，結果として P に対する表示

$$P=B_{2g+1}+\frac{2g+1}{2}t_{2g+1}B_{2g-1}+\frac{2g-1}{2}t_{2g-1}B_{2g-3}+\cdots+\frac{3}{2}t_3B_1 \tag{18}$$

が得られる．L,M の正準交換関係から Q,P の正準交換関係 $[Q,P]=1$ がただちに従う．こうして KP 階層から弦方程式が導かれる．

さらに，L,M に対する Lax 方程式から Q,P に対する Lax 方程式

$$\partial_{t_{2n+1}}Q=[B_{2n+1},\,Q],\quad \partial_{t_{2n+1}}P=[B_{2n+1},\,P]\quad (n=1,\ldots,g) \tag{19}$$

が得られる．これが弦方程式の時間発展の方程式である．上の簡約によって独立変数として残るのは x（これを 1 番目の時間変数 t_1 と同一視することも多い）と $t_3,\ldots,t_{2g-1},t_{2g+1}$ の合計 $g+1$ 個である．このうち t_{2g+1} はやや例外的な性格をもつので，以下ではこれを定数として扱って，残りの $x=t_1$ を含む g 個の独立変数 $x,t_3,\ldots,t_{2g-1}$ に関する時間発展を考える（特に，Painlevé I 型方程式に対しては時間発展を考えない）．

2.3　弦方程式から見た時間変数の解釈

以上の議論は KP 階層（あるいはその簡約としての KdV 階層）を経由しているが，これらの時間発展はもともと弦方程式自体に隠れていたものと見ることもできる．KdV 方程式や可換微分作用素環の理論でよく知られている次の事実（たとえば田中・伊達の本 [10] の序章に丁寧な説明がある）を思い出そう．

補題 1 $[Q,P]$ が 0 階の微分作用素であれば，P は $B_n=(Q^{n/2})_+$ 達の定数係数 1 次結合としてあらわせる．

弦方程式は $[Q,P]=1$ だからまさにこの補題が適用できる．さらに，$B_{2n}=Q^n$ だから B_{2n} の項は省略してもよい．こうして弦方程式を満たす P は，Q の定数係数多項式からなる自明な部分を除けば，一般性を失うことなく

$$P=B_{2g+1}+c_1B_{2g-1}+c_2B_{2g-3}+\cdots+c_gB_1$$

という形にあらわせる．ここで $c_1,\ldots,c_g$ は x に依らない定数である．これと前述の表示を見比べれば係数と時間変数の間に

$$c_1=\frac{2g+1}{2}t_{2g+1},\ c_2=\frac{2g-1}{2}t_{2g-1},\ \ldots,\ c_g=\frac{3}{2}t_3 \tag{20}$$

という対応関係があることがただちにわかる．以下，$c_1,\ldots,c_g$ は常にこの間系によって KdV 階層の時間変数と結ばれているものとする．弦方程式の時間発展とは，弦方程式を保ちつつこれらの定数 $c_1,\cdots,c_g$ を変化させる変形（等モノドロミー変形）に他ならない．

なお，q が一般の値の場合にも同様のことが言える．Adler と van Moerbeke の論文 [8] を参照されたい．

3 Gelfand-Dickey 微分多項式とその使い方

u とその導函数の多項式（すなわち微分多項式）R_n $(n=0,1,2,\ldots)$ を

$$R_n = \operatorname*{Res}_{\partial_x} Q^{(2n+1)/2} \quad (Q^{(2n+1)/2} \text{ における } \partial_x^{-1} \text{ の係数}) \tag{21}$$

によって定義する．すなわち

$$Q^{(2n+1)/2} = \partial_x^{2n+1} + \cdots + R_n\partial_x^{-1} + \cdots.$$

具体的には $R_0 = 1$, $R_1 = u/2$, などとなる．これらの微分多項式を Gelfand-Dickey 微分多項式という．

Gelfand-Dickey 微分多項式は KdV 階層やそれに付随する可換微分作用環の理論で広く用いられる極めて有用な概念である [10]．その一つの鍵となるのは次の公式である．

補題 2 $[B_{2n+1},\, Q] = 2R_{n+1,x}$.

公式自体は $[B_{2n+1},\, Q] = -[(Q^{(2n+1)/2})_-,\, Q]$ という等式から容易に導ける（両辺を比べると 0 階の微分作用素であることがわかり，右辺から R_n との関係がわかる）．この公式から以下のことが従う．

1. $P = B_{2g+1} + c_1B_{2g-1} + \cdots + c_gB_1$ に対する弦方程式 $[Q,P]=1$ は

$$2(R_{g+1} + c_1R_g + \cdots + c_g)_x + 1 = 0$$

に帰着する．1 回積分して積分定数を x のずらしに吸収すれば

$$2(R_{g+1} + c_1R_g + \cdots + c_g) + x = 0 \tag{22}$$

という方程式が得られる（ここでも積分定数は x のずらしに吸収できる）．これがすでに言及した Painlevé I 型方程式の $2g$ 階拡張に他ならない．

2. KdV 階層の時間発展の Lax 方程式 $\partial_{t_{2n+1}}Q = [B_{2n+1},\, Q]$ は

$$\partial_{t_{2n+1}}u = 2R_{n+1,x} \tag{23}$$

に帰着する．

もう一つの重要な鍵は B_{2n+1} に対する「Q-進展開」ともいうべき次のような表示式である．この式の証明には少し手間がかかる（田中・伊達の本 [10] などを参照されたい）．

補題 3

$$B_{2n+1}=\sum_{m=0}^{n}\Big(R_m\partial_x-\frac{1}{2}R_{m,x}\Big)Q^{n-m}.$$

ただし右辺の総和の各項は微分作用素としての積をあらわす．

このことから，微分方程式 $Q\psi=\lambda\psi$ のもとで

$$\begin{aligned}P\psi &= \Big(R_g(\lambda)+c_1R_{g-1}(\lambda)+\cdots+c_g\Big)\psi_x\\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(R_g(\lambda)+c_1R_{g-1}(\lambda)+\cdots+c_g\Big)_x\psi, \qquad (24)\\ B_{2n+1}\psi &= R_n(\lambda)\psi_x-\frac{1}{2}R_n(\lambda)_x\psi, \qquad (25)\end{aligned}$$

という等式が成立することがわかる．ここで

$$R_n(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}R_m\lambda^{n-m}$$

という一種の母函数を導入した．これらの等式は弦方程式やその時間発展の Lax 方程式を 2×2 行列形式に書き直す際に用いられる．

注意 以上のように Gelfand-Dickey 微分多項式は有用な概念であるが，擬微分作用素の分数ベキが関わるため，それを定義通りに求めることは効率的でない．R_n を求めるためには

$$R_{n+1,x}=\frac{1}{4}R_{n,xxx}+uR_{n,x}+\frac{1}{2}u_xR_n \quad (n\geq 0) \qquad (26)$$

という一種の漸化式が用いられる．この等式の左辺は R_{n+1} の導函数だから，R_{n+1} を求めるためには右辺を 1 回積分しなければならない．実際にやってみればわかるように，右辺は必ず u のある微分多項式の導函数になる．こうして $R_0=1$ から出発して R_n が順次

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{u}{2},\\ R_2 &= \frac{1}{8}u_{xx}+\frac{3}{8}u^2,\\ R_3 &= \frac{1}{32}u_{xxxx}+\frac{3}{16}uu_x+\frac{1}{8}uu_{xx}-\frac{1}{32}u_x^2+\frac{5}{16}u^3,\ \ldots,\end{aligned}$$

というように決まって行く（積分定数はすべてゼロにする）．

4 2 × 2 行列型の線形方程式・Lax 方程式

弦方程式とその時間発展は線形微分方程式系

$$Q\psi = \lambda\psi, \quad P\psi = \partial_\lambda\psi, \quad \partial_{t_{2n+1}}\psi = B_{2n+1}\psi \tag{27}$$

の Frobenius の意味での可積分条件である（これもまた KP 階層からの帰結である）．これらの線形微分方程式を 2 次元ベクトル Ψ の言葉に翻訳しよう．

最初の二つの方程式は (6) の形に書き直せる．前節で示した $P\psi$ の表示式 (24) から $V(\lambda)$ の行列要素が読みとれる．まず $\alpha(\lambda)$ と $\beta(\lambda)$ は

$$P\psi = \alpha(\lambda)\psi + \beta(\lambda)\psi_x$$

という方程式の係数であるが，(24) と見比べれば

$$\beta(\lambda) = R_g(\lambda) + c_1R_{g-1}(\lambda) + \cdots + c_g, \quad \alpha(\lambda) = -\frac{1}{2}\beta(\lambda)_x \tag{28}$$

となることがわかる．さらに，この方程式を x で微分して，$Q\psi = \lambda\psi$ を用いて ψ_{xx} の項を消去すれば，$\partial_x P\psi$ を ψ と ψ_x の函数係数 1 次結合であらわす式

$$\partial_x P\psi = \gamma(\lambda)\psi - \alpha(\lambda)\psi_x$$

が得られる．これによって $\gamma(\lambda)$ が

$$\gamma(\lambda) = (\lambda - u)\beta(\lambda) - \frac{1}{2}\beta(\lambda)_{xx} \tag{29}$$

という形に決まる．λ の多項式としての次数は

$$\deg\alpha(\lambda) = g - 1, \quad \deg\beta(\lambda) = g, \quad \deg\gamma(\lambda) = g + 1 \tag{30}$$

となっている．

t_{2n+1} に関する発展方程式も同様にして (25) から読みとれる．結果として Ψ に対する行列型線形微分方程式系

$$\partial_{t_{2n+1}}\Psi = U_n(\lambda)\Psi \tag{31}$$

が得られる．係数行列

$$U_n(\lambda) = \begin{pmatrix} a_n(\lambda) & b_n(\lambda) \\ c_n(\lambda) & -a_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

の行列要素は

$$b_n(\lambda) = R_n(\lambda), \quad a_n(\lambda) = -\frac{1}{2}R_n(\lambda)_x,$$
$$c_n(\lambda) = (\lambda - u)R_n(\lambda) - \frac{1}{2}R_n(\lambda)_{xx} \tag{32}$$

で与えられる．行列要素同士が $V(\lambda)$ の場合に似た関係で結ばれているが，このことは

$$V(\lambda) = U_{2g+1}(\lambda) + c_1 U_{2g-1}(\lambda) + \cdots + c_1 U_1(\lambda)$$

という関係（P と B_{2n+1} 達の間の関係からの帰結）に照らせば当然である．また

$$U(\lambda) = U_1(\lambda)$$

という関係（これは $B_1 = \partial_x$ からの帰結）にも注意されたい．

これらの線形方程式から $V(\lambda)$ の時間発展を記述する Lax 方程式系

$$[\partial_{t_{2n+1}} - U_n(\lambda),\ \partial_\lambda - V(\lambda)] = 0 \tag{33}$$

ならびに時間発展の可換性をあらわす零曲率方程式

$$[\partial_{t_{2m+1}} - B_m(\lambda),\ \partial_{t_{2n+1}} - B_n(\lambda)] = 0 \tag{34}$$

が得られる．こうして弦方程式の時間発展が λ に関する常微分方程式 $\partial_z\Psi = V(\lambda)$ の等モノドロミー変形を定めることが確認できる．弦方程式自体は $x = t_1$ に関する時間発展としてこの系の中に組み込まれている．

5 スペクトル曲線・Darboux 座標・Hamilton 系

以後の議論の目標は，上の行列型 Lax 方程式系からスペクトル曲線上の g 個の点の組を取り出し，それが従う微分方程式を非自励 Hamilton 系の形で与えることである．

5.1 スペクトル曲線の定義多項式の性質

まず，スペクトル曲線の方程式 $\mu^2 + h(\lambda) = 0$ に現れる λ の多項式

$$h(\lambda) = \det V(\lambda) = -\alpha(\lambda)^2 - \beta(\lambda)\gamma(\lambda) \tag{35}$$

の構造をある程度調べておく必要がある．$V(\lambda)$ の構造から $h(\lambda)$ が $-\lambda^{2g+1}$ で始まる $2g+1$ 次の多項式であることがすぐにわかる．さらに，Lax 方程式から

$$\partial_{t_{2n+1}} h(\lambda) = -\operatorname{Tr} U_n'(\lambda) V(\lambda) \tag{36}$$

ということもすぐにわかる（プライムは λ についての導函数 $' = \partial_\lambda$ をあらわす）．特に

$$\partial_x h(\lambda) = -\beta(\lambda) = -\lambda^g + \cdots$$

となるが，このことは $h(\lambda)$ の $g+1$ 次以上の項の係数が x に依らない量であることを意味する．さらに詳しく調べれば，

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= -\lambda^{2g+1} - 2c_1\lambda^{2g} - 2(c_2 + c_1^2)\lambda^{2g-1} - \cdots - (2c_g + 2c_{g-1}c_1 + \cdots)\lambda^{g+1} \\ &\quad - x\lambda^g + I_1\lambda^{g-1} + \cdots + I_g \end{aligned} \tag{37}$$

というように，$g+1$ 次以上の項の係数は $c_1, \ldots, c_g$ の定数係数多項式（高々２次）であり，λ^g の係数は $-x$ に等しい，ということがわかる．実際，$h(\lambda)$ を定義通りに計算すればこれらの項にも u の微分多項式が現れるが，Gelfand-Dickey 微分多項式の満たす漸化式 (26) を用いればそれらの微分多項式はゼロになることが逐一確かめられる．

結局次のことが成立していることになる．

補題 4 $h(\lambda)$ の g 次以上の項とそれ以下の項を分けて

$$h(\lambda) = I_0(\lambda)\lambda^g + I_1\lambda^{g-1} + \cdots + I_g$$

とあらわせば，$I_0(\lambda)$ は u とその導函数を含まない．

$I_0(\lambda)$ の部分は x と時間変数の函数であるが（$c_1, \ldots, c_g$ が $t_3, \ldots, t_{2g-1}$ と１次関係 (20) によって結ばれていることを思い出されたい），弦方程式の解に依らず常に同じ形をしている．この意味で $I_0(\lambda)$ は既知のデータであり，後で示す Hamilton 系でもこれが Hamiltonian を構成する要素として組み込まれている．

ちなみに，等スペクトル変形の場合には $I_0(\lambda)$ は時間･空間変数によらない定数，$I_1, \ldots, I_g$ は保存量である．

5.2 スペクトル曲線上の点の組

弦方程式の場合と同様に，非自励 Hamilton 系を書き下すための変数（Darboux 座標）として $\beta(\lambda)$ の零点 $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ ならびにそれらにおける $\alpha(\lambda)$ の値 $\mu_1, \ldots, \mu_g$ を用いる：

$$\beta(\lambda) = \prod_{j=1}^{g}(\lambda - \lambda_j), \quad \mu_j = \alpha(\lambda_j). \tag{38}$$

$V(\lambda_j)$ が

$$V(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ \gamma(\lambda_j) & -\mu_j \end{pmatrix}$$

という三角行列であるから，μ_j は $V(\lambda_j)$ の固有値であり，

$$\mu_j^2 + h(\lambda_j) = 0 \quad (j = 1, \ldots, g) \tag{39}$$

という方程式が成り立つ．すなわち，(λ_j, μ_j) はそれぞれスペクトル曲線の上を動く点である．

逆に，(λ, μ) 平面上の一般の位置にある g 個の点の組 $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g$ が与えられれば，それに対応する $V(\lambda)$ が一意的に決まる：

補題 5 g 個の点の組 $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g$ が条件

$$\lambda_j \neq \lambda_k \quad (j \neq k) \tag{40}$$

を満たせば，上のような $V(\lambda)$ が復元できる．点の組に $V(\lambda)$ を対応させる写像 $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g \mapsto V(\lambda)$ は有理写像である．

$V(\lambda)$ の復元の手順は以下のようになる．

1. $\alpha(\lambda)$ と $\beta(\lambda)$ を $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g$ に対して関係式 (38) を満たす多項式として決める．特に，$\alpha(\lambda)$（$g-1$ 次数の多項式）を決めることは Lagrange 補間公式に帰着する．
2. $I_0(\lambda)$ を既知のデータ，(39) を $I_1, \ldots, I_g$ に対する連立1次方程式とみなすことによって，$h(\lambda) = I_0(\lambda)\lambda^g + I_1\lambda^{g-1} + \cdots + I_g$ を決める．これも補間公式に帰着する．
3. $\gamma(\lambda)$ を

$$\gamma(\lambda) = -\frac{h(\lambda) + \alpha(\lambda)^2}{\beta(\lambda)}$$

によって定める．$h(\lambda)$ の定め方によって，分母の零点においては分子も零点をもつ．したがって分子は分母で割りきれて，$\gamma(\lambda)$ は多項式となる．

このようにして決まる写像 $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g \mapsto V(\lambda)$ が有理写像であることは，この構成に有理式のみが現れること（補間公式も有理式からなることに注意）からわかる．

以上のような意味で，平面上の g 個の点の組 $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g$ を与えることと $V(\lambda)$ を与えることは同値である．この局所可逆な有理写像によって $V(\lambda)$ の Lax 方程式系が $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g$ に対する力学系（非自励 Hamilton 系）に翻訳されることになる．

5.3 非自励 Hamilton 系

前項のように $(\lambda_j, \mu_j)_{j=1}^g$ と $V(\lambda)$ を対応づけるとき，$R_1, \ldots, R_g$ は λ_j 達の対称函数

$$R_n = r_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_g) \tag{41}$$

とみなせる，ということに注意しておこう．これは(28)で示した $\beta(\lambda)$ の定義式からわかる．この定義式を $\beta(\lambda)=\lambda^g+\beta_1\lambda^{g-1}+\cdots+\beta_g$ の係数で書き直せば

$$\begin{aligned}\beta_1 &= R_1+c_1,\\ \beta_2 &= R_2+c_1R_1+c_2,\\ &\vdots\\ \beta_g &= R_g+c_1R_{g-1}+\cdots+c_g\end{aligned}$$

となるが（ここでも $c_1,\ldots,c_g$ は(20)によって時間変数の1次式とみなしている），これを $R_1,R_2,\ldots$ について解いたもの

$$\begin{aligned}R_1 &= \beta_1-c_1,\\ R_2 &= \beta_2-c_1(\beta_1-c_1)-c_2,\\ &\vdots\end{aligned}$$

が求める表示を与える（$\beta_1,\ldots,\beta_g$ は言うまでもなく λ_j 達の対称函数である）．

以上の準備のもとで弦方程式の時間発展の Hamilton 構造に関する主結果を述べることができる：

定理 1 $V(\lambda)$ の t_{2n+1} $(n=0,\ldots,g-1)$ に関する時間発展は写像 $V(\lambda)\mapsto(\lambda_j,\mu)_{j=1}^g$ によって非自励 *Hamilton* 系

$$\partial_{t_{2n+1}}\lambda_j=\frac{\partial H_n}{\partial\mu_j},\quad \partial_{t_{2n+1}}\mu_j=-\frac{\partial H_n}{\partial\lambda_j} \tag{42}$$

に対応する．*Hamiltonian* H_n は

$$H_n=\sum_{j=1}^g\frac{\mu_j^2+I_0(\lambda_j)\lambda_j^g}{\beta'(\lambda_j)}R_n(\lambda_j)-\sum_{j=1}^g\frac{\mu_j}{\beta'(\lambda_j)}R_n'(\lambda_j) \tag{43}$$

で与えられる．ただし多項式 $R_n(\lambda)$ および $R_n'(\lambda)$ の係数 $R_1,\ldots,R_g$ は前述のように $\lambda_1,\ldots,\lambda_g$ の対称函数とみなす．

この結果を前回報告した結果[1]と見比べると興味深いことがわかる．前回報告した弦方程式自体（すなわち $t_1=x$ についての変形）の Hamiltonian は

$$H_0=\sum_{j=1}^g\frac{\mu_j^2+I_0(\lambda_j)\lambda_j^g}{\beta'(\lambda_j)} \tag{44}$$

に他ならない．この場合，$R_0(\lambda)=1$ なので，H_n の定義式右辺の第二の総和項は消える．$t_3,\ldots,t_{g-1}$ に関する時間発展の Hamiltonian には $R_n'(\lambda_j)$ を含む項が加わる．他方，この

系の等スペクトル変形における類似物は KdV 階層の特殊解（超楕円函数解）を記述する方程式であるが，その場合の Hamilton 系（自励系となる）の Hamiltonian には $R'_n(\lambda_j)$ のような項は存在しない（Hamiltonian は上の H_n の定義式において第一の総和項のみを残し，$c_1,\ldots,c_g$ を定数においたものとなる）．等スペクトル変形とのこのような微妙な相違点は Garnier 系の場合 [12] などにも見られるので，等モノドロミー系では普通に生じる事情と思われる．むしろ H_0 が例外的だったのである．

等スペクトル変形の場合にはここで紹介したような Hamilton 系への書き換えをより一般的な視点から説明することができる．たとえば Falqui, Magri, Pedroni, Zubelli[13] は「双 Hamilton 構造」の枠組でこのことを論じている．等モノドロミー変形の場合にも同様の取り扱いが望まれる．

5.4 証明のアイディア

現時点では Falqui 達 [13] のような一般的な枠組は用意できていないので，証明は前回の報告 [1] で紹介したような素朴な方法による．

その出発点は $V(\lambda)$ の Lax 方程式 (33) である．行列要素で書けばこれは次のような連立方程式になる：

$$\begin{aligned}
\partial_{t_{2n+1}}\alpha(\lambda) &= b_n(\lambda)\gamma(\lambda) - c_n(\lambda)\beta(\lambda) + a'_n(\lambda),\\
\partial_{t_{2n+1}}\beta(\lambda) &= -2b_n(\lambda)\alpha(\lambda) + 2a_n(\lambda)\beta(\lambda) + b'_n(\lambda),\\
\partial_{t_{2n+1}}\gamma(\lambda) &= 2c_n(\lambda)\alpha(\lambda) - 2a_n(\lambda)\gamma(\lambda) + c'_n(\lambda).
\end{aligned}$$

これらの微分方程式から λ_j, μ_j に対する微分方程式を取り出す．

λ_j に対する微分方程式を得るには，恒等式 $\beta(\lambda_j) = 0$ を t_{2n+1} について微分して得られる式

$$\partial_{t_{2n+1}}\beta(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} + \beta'(\lambda_j)\partial_{t_{2n+1}}\lambda_j = 0$$

に注目する．上の $\beta(\lambda)$ に対する微分方程式を用いて第一項を書き直せば

$$\partial_{t_{2n+1}}\beta(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} = -2\mu_j R_n(\lambda_j) + R'_n(\lambda_j)$$

となる（ここで $b_n(\lambda) = R_n(\lambda)$ という関係を用いて $b_n(\lambda_j)$ を書き直した）．こうして

$$\partial_{t_{2n+1}}\lambda_j = \frac{2\mu_j}{\beta'(\lambda_j)}R_n(\lambda_j) - \frac{R'_n(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)} \tag{45}$$

という方程式を得る．これは前述の Hamiltonian H_n によって $\partial_{t_{2n+1}}\lambda_j = \partial H_n/\partial\mu_j$ という正準形にあらわせる．

同様の議論によって μ_j に対しても

$$\partial_{t_{2n+1}}\mu_j = -\frac{h'(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)}R_n(\lambda_j) - \frac{\alpha'(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)}R'_n(\lambda_j) + \alpha'_n(\lambda_j) \tag{46}$$

という方程式を得る．Gelfand-Dickey 微分多項式の性質や補間公式を用いた計算によって，この方程式もやはり正準形 $\partial_{t_{2n+1}}\mu_j = -\partial H_n/\partial\lambda_j$ にまとまることが示せる．この部分の計算は長くて見通しが悪いのでここでは紹介しない．望むらくは，このような計算をしないで Falqui 達 [13] のように高い見地から Hamiltonian の構造（特に $R'_n(\lambda_j)$ を含む補正項の由来）を説明したい．これは今後に残された課題である．

参考文献

[1] 高崎金久，弦方程式のスペクトル曲線と Hamilton 構造, 数理解析研究所講究録 No. 1296 (2002), 149–167.

[2] M. Douglas, Strings in less than one-dimension and the generalized K-dV hierarchies, Phys. Lett. **238B** (1990), 176–180.

[3] M. Fukuma, H. Kawai and R. Nakayama, Infinite dimensional Grassmannian structure of two dimensional string theory, Commun. Math. Phys. **143** (1991), 371–403.

[4] V. Kac and A. Schwarz, Geometric interpretation of partition functions of 2D gravity, Phys. Lett. **B257** (1991), 329–334.

[5] G. Moore, Geometry of the string equations, Commun. Math. Phys. **133** (1990), 261–304; Matrix models of 2D gravity and isomonodromic deformations, Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990), 255–285.

[6] A. Schwarz, On solutions to the string equations, Mod. Phys. Lett. **A29** (1991), 2713–2725.

[7] M. Kontsevich, Intersection theoy on the moduli space of curves and the matrix Airy function, Commun. Math. Phys. **147** (1992), 1–23.

[8] M. Adler and P. van Moerbeke, A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity, Commun. Math. Phys. **147** (1992), 25–56.

[9] P. van Moerbeke, Integrable foundations of string theory, in *Lectures on integrable systems*, pp. 163–267 (World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994).

[10] 田中俊一・伊達悦朗，KdV 方程式（紀伊国屋書店 1979 年）．

[11] A.Yu. Orlov and E.I. Shulman, Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation, LettMathPhys 12 (1986), 171–179.
A.Yu. Orlov, Vertex operators, $\bar{\partial}$-problems, symmetries, variational indentities and Hamiltonian formalism for $2+1$ integrable systems, in: *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1988).
P.G. Grinevich A.Yu. and Orlov, Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmannians, $\det \bar{\partial}_j$ and Segal Wilson τ function, in: *Problems of Modern Quantum Field Theory* (Springer-Verlag, 1989).

[12] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equation, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **33** (1986), 575–618 .

[13] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni and J.P. Zubelli, A bi-Hamiltonian theory of stationary KdV flows and their separability, e-print arXiv:nlin.SI/0003020.